

In het recente verleden is België verrijkt met twee bijzondere zonnewijzers, waarbij het patroon van uur- en datumlijnen zich in een cilindrische wijzerplaat bevindt. Het gnomonisch ontwerp van beide is van Willy Leenders. Op een kantoorpand in Brussel valt de schaduw van een bol op de binnenkant van een kwart cilinder (fig. 1). De bol hangt niet in de as van de cilinder, maar tussen de as en de cilinderwand.

Op een driesprong in Humbeek staat een matglazen cilinder, die dag en nacht de ware plaatselijke tijd (en de datum) wijst (fig. 2). Overdag wordt de aanwijzing verzorgd door de schaduw van een donkere schijf midden op de bovenzijde, de nodus; 's nachts neemt een projector die taak over op een eigen lijnenraster.

In een tweetal artikelen [1,2] beschreef Willy het ontwerpproces in detail. Hij berekende eerst de uur- en datumlijnen van een verticale puntzonnewijzer. Vervolgens bepaalde hij de centrale projectie hiervan vanuit de nodus op de cilinderwand. Tenslotte berekende hij de afroling van het lijnenpatroon op de cilinder. Bij de zonnewijzer in Humbeek deed zich nog het probleem voor dat de vlakke zonnewijzer die als tussenstap diende, slechts beschenen wordt als de zon zuidelijk van de oost-westlijn staat. De lijnen voor de vroege en late uren moesten dus in een aparte ontwerpslag via een verticale noordwijzer geconstrueerd en aan het middendeel vastgeplakt worden.

Deze procedure voelt contra-intuïtief aan. Het lijkt niet alleen eenvoudiger maar ook logischer om de schaduw van de nodus, die gedurende een dag in de cilinder ronddraait, rechtstreeks te modelleren op een cilindrische wijzerplaat, zonder de tussenstap van een vlakke verticale zonnewijzer. Daarom wil ik in dit artikel nagaan hoe een rechtstreekse berekening verloopt.

We gaan uit van de twee basisformules van de zonnewijzerkunde, voor de zonshoogte  $H$  en het azimut  $Z$  van de zon:

$$\sin(H) = \sin(\delta) \sin(\varphi) + \cos(\delta) \cos(\varphi) \cos(t)$$

$$\tan(Z) = \sin(t) / [\sin(\varphi) \cos(t) - \cos(\varphi) \tan(\delta)]$$

Hierin is  $\delta$  de zonsdeclinatie,  $t$  de uurhoek van de zon en  $\varphi$  de geografische breedte waarop de zonnewijzer opgesteld zal worden. Alle hoeken worden uitgedrukt in graden ( $^{\circ}$ ).

Mijn benadering wordt toegelicht in fig. 3. Het linker deel toont een horizontale doorsnede door de cilinder. Dat is een cirkel met straal  $R$ , uitgedrukt in een willekeurige eenheid, en middelpunt  $M$ .  $M$  is het punt waar de as van de cilinder door het vlak prikt.

In de cirkel ligt op een willekeurig punt  $P$  de nodus (schaduwgever). Bij een bepaalde zonshoogte  $H$  en azimut  $Z$  valt de schaduw van  $P$  op de wand van de cilinder; dat is het schaduwpunt  $S$ . Het verticale meridiaanvlak door de as snijdt de cirkel op twee plaatsen. Aan de noordkant is dat in punt  $O$ .

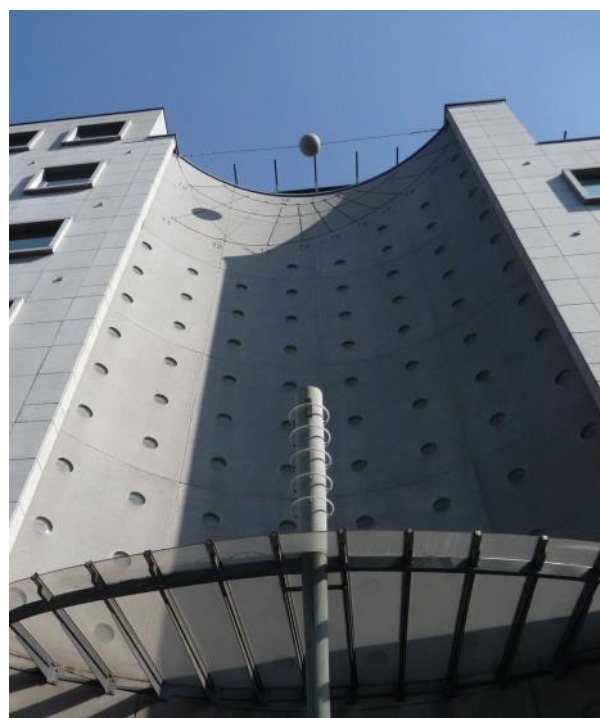


Fig. 1. De zonnewijzer aan het kantoorpand Boudewijnlaan 12 in Brussel.



Fig. 2. De cilinderzonnewijzer in Humbeek. Het bovenste lijnenstel is de eigenlijke zonnewijzer, op het patroon daaronder wordt 's nachts door een projector een lichtvlek geworpen. Bron: [www.wijzerweb.be](http://www.wijzerweb.be).

Op de cilinderwand brengen we een coördinatenstelsel aan, met de oorsprong in punt O. De x-coördinaat loopt horizontaal langs de cirkel en is gelijk aan de lengte van de cirkelboog; naar oost is positief, naar west negatief. De y-coördinaat loopt verticaal; naar beneden is positief. X en y hebben dezelfde eenheid als R.

Een tweede verticaal vlak is het 'azimutvlak' (rechts in fig. 3), dat door (het middelpunt van) de zon en door de punten P en S gaat. Dat vlak snijdt de cirkel ook op twee plaatsen. Het snijpunt dat recht boven S ligt, is T. De middelpuntshoek OMT noemen we  $\alpha$  (alfa). Die telt vanaf O naar oost positief en naar west negatief, net als de x-coördinaat. Daarmee heeft  $\alpha$  hetzelfde teken als Z: vóór het middaguur negatief, erna positief. De afstand PT noemen we D.

Als  $\alpha$  en D eenmaal bekend zijn, zijn de coördinaten  $X_s$  en  $Y_s$  van het schaduwpunt S eenvoudig te berekenen:

$$X_s = 2\pi R \alpha / 360^\circ, Y_s = D \tan(H).$$

Ook  $X_s$  heeft hetzelfde teken als Z: vóór het middaguur negatief, erna positief. De hoogte H is altijd positief, dus  $Y_s$  is ook altijd positief. Na afrollen van de cilinder in een plat vlak vormen x en y het gebruikelijke rechthoekige coördinatenstelsel.

### Nodus op de as

Het eenvoudigste geval is dat in Humbeek: De nodus P ligt op de as van de cilinder en valt dus samen met het middelpunt M. Daarmee is  $\alpha = Z$  en  $D = R$ , dus de coördinaten van het schaduwpunt S zijn:

$$X_s = 2\pi R Z / 360^\circ, Y_s = R \tan(H).$$

In een spreadsheet laten we H en Z berekenen voor een aantal uurhoeken en declinaties. Daarmee zijn  $\alpha$  en D bekend en worden  $X_s$  en  $Y_s$  berekend en getekend (fig. 4). De lay-out voor een zonnwijzer als die in Humbeek is dus wel heel eenvoudig te verkrijgen.

### Nodus op een willekeurige plaats

Na deze vingeroefening komt het echte werk: de nodus ligt op een willekeurige plaats binnen de cilinder, zoals in fig. 3. In fig. 5 is de positie van de nodus P ten opzichte van M vastgelegd door de afstand f R en de hoek OMP, die we  $\sigma$  (sigma) noemen. De fractie f is een getal tussen 0 en 1. Met  $f = 0$  ontstaat de situatie van Humbeek, waarbij P op M ligt; met  $f = 1$  ligt P op de cilinderwand. Hier is  $f = 0,45$ . De hoek  $\sigma$  telt vanaf O naar oost positief (net als de x-coördinaat), tot  $+180^\circ$ , en naar west negatief, tot  $-180^\circ$ . Hier is  $\sigma = 65^\circ$ . Op het getekende tijdstip is  $Z = -45^\circ$ .

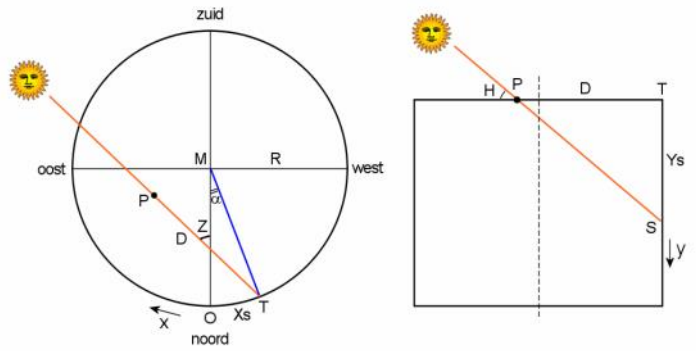


Fig. 3. Links: horizontale doorsnede door een verticale cilinder, met middelpunt M en straal R. Punt P is de nodus. Rechts: Het verticale azimutvlak bevat de nodus P en zijn schaduwpunt S. Op de binnenwand is het coördinatenstelsel x-y aangebracht, met oorsprong O. De as van de cilinder (stippellijn) ligt achter dit vlak.

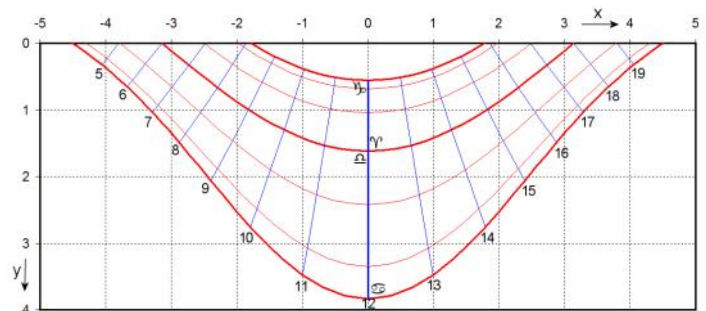


Fig. 4. Het lijnenpatroon op de binnenzijde van de afgerolde cilinder voor de breedte van Humbeek,  $50,97^\circ$ . De straal R van de cilinder is 2 eenheden

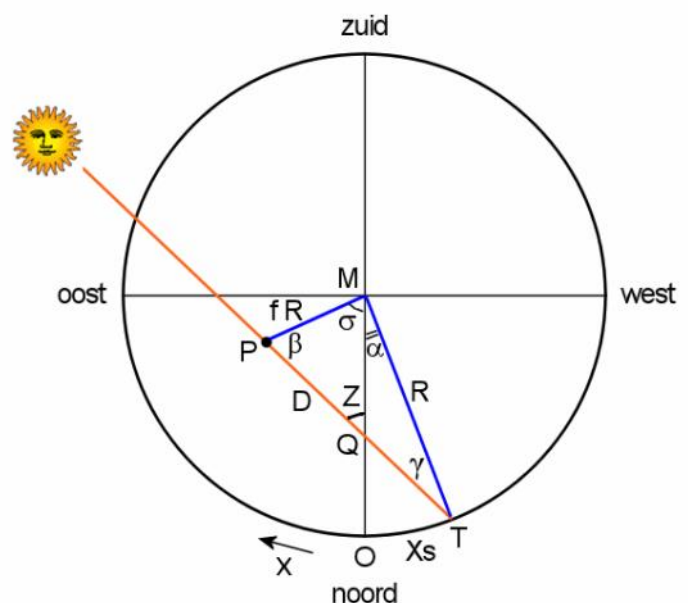


Fig. 5. De horizontale doorsnede van fig. 3 links, met de nodus P op een willekeurige plaats. Met eenvoudige meetkunde kan uit de bekende azimuthoek Z en de positie van P, uitgedrukt door f en  $\sigma$ , de hoek  $\alpha$  naar de schaduw van P berekend worden.

In driehoek MPT zijn de zijden  $MT = R$  en  $MP = f R$  bekend. De hoek  $MPT = \beta$  (bèta) kan bepaald worden in driehoek MPQ:  $\beta = 180^\circ - (\sigma - Z)$ . Het minteken voor Z is omdat Z hier negatief is. Want in een driehoek is de som van de absolute waarden van de hoeken gelijk aan  $180^\circ$ . Zo is hoek TMP gelijk aan  $(\sigma - \alpha)$ , omdat a hier negatief is. De derde hoek in driehoek MPT noemen we  $\gamma$  (gamma).

De opgave is dus om hoek  $OMT = \alpha$  en de afstand  $PT = D$  te berekenen. Hiervoor is de *sinusregel* het gereedschap bij uitstek. Voor driehoek MPT geeft de sinusregel:

$$R / \sin[180^\circ - (\sigma - Z)] = f R / \sin(\gamma) = D / \sin(\sigma - \alpha)$$

Omdat  $\sin(180^\circ - x) = \sin(x)$ , kunnen we de eerste term ook schrijven als  $R / \sin(\sigma - Z)$ .

We nemen eerst de eerste twee termen:

$$R / \sin(\sigma - Z) = f R / \sin(\gamma), \text{ waaruit volgt:}$$

$$\sin(\gamma) = f \sin(\sigma - Z), \text{ oftewel: } \gamma = \arcsin[ f \sin(\sigma - Z) ].$$

Nu is de arcsin-functie niet éénwaardig; bijv.  $\arcsin(0,5) = 30^\circ$  en  $150^\circ$ . Maar  $\gamma$  kan nooit stomp zijn en ligt dus altijd in het interval  $-90^\circ \dots +90^\circ$ . Daarmee is het resultaat eenduidig.

Omdat Z negatief is, is hoek MQT gelijk aan  $(180^\circ + Z)$ , zodat uit driehoek MQT volgt:

$$\alpha = Z - \gamma = Z - \arcsin[ f \sin(\sigma - Z) ].$$

Nu passen we de sinusregel toe op de eerste en derde term:

$$R / \sin(\sigma - Z) = D / \sin(\sigma - \alpha), \text{ waaruit volgt:}$$

$$D = R \sin(\sigma - \alpha) / \sin(\sigma - Z).$$

Deze formule vergt enige aandacht.

Als de noemer  $\sin(\sigma - Z)$  nul wordt, is  $\sin(\sigma - \alpha)$  ook nul en kan D niet berekend worden. Dat is het geval als M, P en T op één lijn liggen. Als P vanuit de zon gezien voorbij M ligt, is  $\sigma = Z$  en  $D = (1-f) R$ ; als P vóór M ligt, is  $\sigma = Z \pm 180^\circ$  en  $D = (1+f) R$ .

Met de gevonden waarden van  $\alpha$  en D worden de coördinaten  $X_s$  en  $Y_s$  berekend en getekend. Hiervoor is een spreadsheet in Excel gemaakt, dat ook te downloaden is [3]. Fig. 6 geeft het resulterende lijnenpatroon voor  $51^\circ$  NB.

Wat de precieze relatie tussen de nodus en de as van de cilinder is bij de Brusselse zonnwijzer, wordt in het artikel van Willy Leenders [1] niet vermeld. In [4] valt te lezen dat de zonnwijzer een kwart cilinder beslaat en ongeveer naar het zuidzuidwesten gericht is. Dat laatste betekent dat  $\sigma$  in de buurt van  $22,5^\circ$  is, en naar fig. 1 te oordelen is f een stuk groter dan 0,5. Met wat proberen blijkt het spreadsheet met de waarden  $f = 0,7$  en  $\sigma = 20^\circ$  een lijnenpatroon op te leveren dat goed overeenkomt met het patroon in [1] (fig. 7).

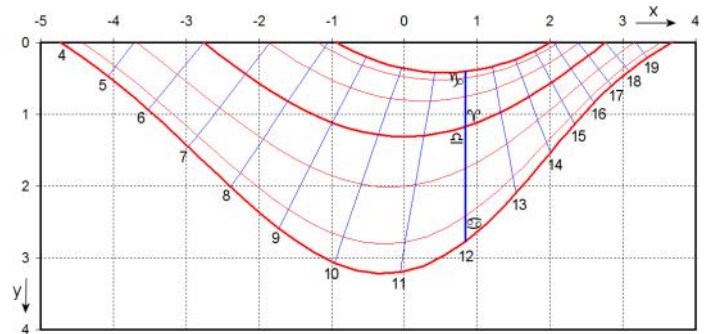


Fig. 6. Lijnenpatroon voor het voorbeeld van fig. 5, voor  $51^\circ$  NB en straal van de cilinder  $R = 2$  eenheden. Voor de nodus geldt:  $f = 0,45$  en  $\sigma = 65^\circ$ .

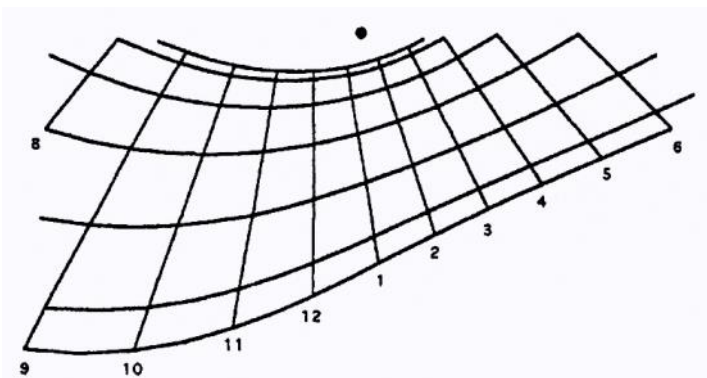
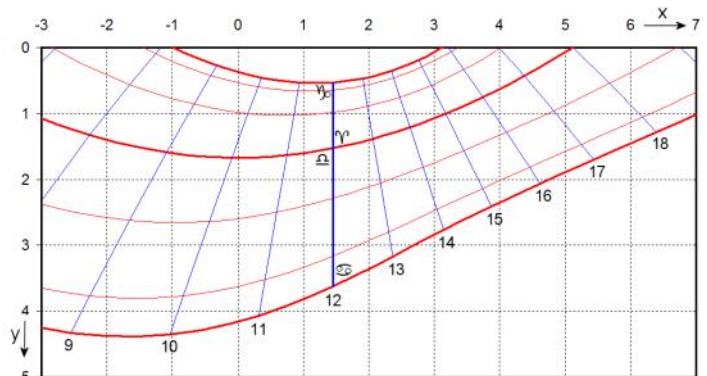


Fig. 7. Boven: het patroon berekend met het spreadsheet, voor  $50,86^\circ$  NB, met  $R = 6$  eenheden,  $f = 0,7$  en  $\sigma = 20^\circ$ . Onder: het lijnenpatroon voor de zonnwijzer in Brussel, uit [1].

## Nodus op de noordrand

Bij de controle van het spreadsheet plaatste ik de nodus ook op de noordrand, met de waarden  $f = 1$  en  $\sigma = 0^\circ$ . Ik verwachtte dat dat geen lijnenpatroon zou horen op te leveren. Toen er toch wat verscheen (fig. 8), dacht ik even dat het spreadsheet niet deugde. Maar al gauw realiseerde ik mij dat - mits de cilinder transparant is - de schaduw van de nodus wel degelijk op de binnenwand kan vallen. Dat gebeurt zodra de zon noordelijk van de oost-west lijn staat, wat gedurende het hele zomerhalfjaar het geval is aan het begin van de morgen en het eind van de middag, op dezelfde uren waarop een verticale noordwijzer werkt. Op de langste dag is dat zelfs ca. 7 van de ca. 16 daguren het geval.

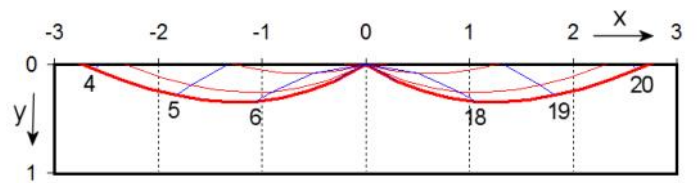


Fig. 8. Als de nodus op de noordkant van de cilinder geplaatst wordt, is er in het zomerhalfjaar 's morgens vroeg en 's avonds toch nog een schaduwpunt op de cilinderwand zichtbaar op dit lijnenstel. Hier is  $\varphi = 51^\circ$  NB en  $R = 2$  eenheden.

## Nodus op de westrand

Op een cilindrisch drinkglas kun je een nodus op de wand aanbrengen en het glas daarmee tevens als zonnwijzer laten dienen. Dan is  $f = 1$ . Het ligt voor de hand om de nodus aan de zuidkant te nemen. Maar Hendrik Hollander deed het anders: hij plaatste de nodus aan de westkant, dus met  $\sigma$  ca.  $-90^\circ$  (fig. 9). Daarmee loopt het bereik van de zonnwijzer van ca. 14 uur MET tot zonsondergang. Het spreadsheet levert met  $f = 1$  en  $\sigma = -90^\circ$  een vergelijkbaar lijnenpatroon op (fig. 10), zij het dat het resultaat gespiegeld moest worden, omdat we in fig. 9 de *buitenkant* van de cilinder zien.

Het glas van Hendrik werkt alleen correct als het *leeg* is. Het is dus bedoeld om te kunnen zien of het borreluur al aangebroken is, en daarna of er nog tijd is om het geleegde glas opnieuw te vullen. Zou het glas in *gevulde* toestand als correcte zonnwijzer moeten kunnen dienen - uiteraard gevuld met een doorzichtige vloeistof - dan zou het lijnenpatroon er heel anders uitzien. Maar daarover misschien een volgende keer.



Fig. 9. Een zonnwijzerglas van Hendrik Hollander was het lustrumgeschenk 2008 voor de leden. Het glas is licht conisch en Hendriks programma hield daar rekening mee. Het zonnwijzerpatroon, voor zomertijd in Utrecht, is aangebracht door lasergrovering.

## Referenties

1. W. Leenders, Een zonnwijzer op een hol cilindrisch vlak. Zonnetijdingen 2002-4, nr. 24, p. 14-15.
2. W. Leenders, Een zonnwijzer op de binnenkant van een cilinder, aan de buitenkant te zien. Zonnetijdingen 2013-4, nr. 68, p. 4-6.
3. Het Excel-spreadsheet CilinderZw.xls (voor Windows) is te downloaden van [www.fransmaes.nl/zonnwijzers](http://www.fransmaes.nl/zonnwijzers), menu -optie Downloads.
4. W. Leenders, Grootste verticale zonnwijzer van het land te Brussel. Zonnetijdingen 2006-3, nr. 39, p. 4-5.

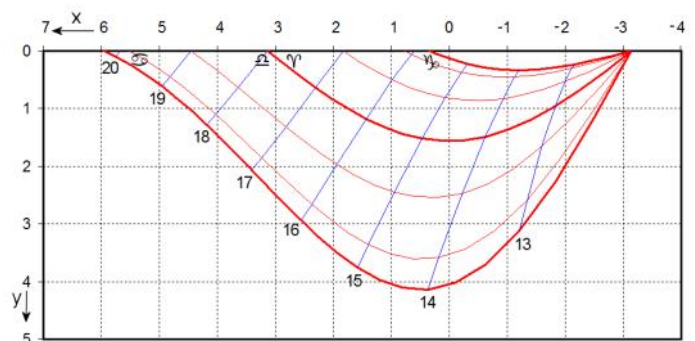


Fig. 10. Het patroon voor een zonnwijzer voor zomertijd op de buitenkant van een cilindrisch glas, berekend voor  $52^\circ$  NB, met de nodus aan de westkant ( $f = 1$ ,  $\sigma = -90^\circ$ ,  $R = 2$ ).